

Profit distribution in several agricultural employment situations

Vasillaq Kedhi ¹, Anjeza Bekolli ^{2*}

¹University of Tirana, Albania

²Agricultural University of Tirana, Albania

*Corresponding author; E-mail: abekolli@ubt.edu.al

Abstract

In the agriculture sector, temporary or seasonal employment is a growing trend. The decision to accept or reject the terms of employment, where assessing the amount of gain from each participating party is of course a critical component. The purpose of this paper, is to provide rational and theoretically based arguments for the choices made. Quantitative analysis based on data collected and case description, can be used following principles and criteria appropriate to certain circumstances, such as the principle of equality, the principle of proportionality, the criterion of marginal contributions, the best of a bad bunch, group disagreement, etc., or a combination of them, is required to achieve the most reasonable and acceptable distribution of work benefits. Although each case of agricultural employment has its own characteristics, we suggest the results of a cooperative game theory to determine a reward measure on the basis of such criteria. The article looks at three distinct employment scenarios in agriculture, both in terms of employer-employee relationships and individual worker productivity. In all three circumstances, the parties (owner and employees) agreed to pay reward based on the net profit made from production at the end of the work season. All three cases have been mathematically modeled as cooperative games, for which subgame perfect solutions and one point solutions have been found. A mathematical model is developed based on hypothetical conditions using mathematical notions, which make the paper findings adoptable to real environment problems.

Keywords: cooperative game, coalition, core, subset solutions, one-point solutions

JEL Codes: C70, C71, C78

* Corresponding author: Anjeza Bekolli; E-mail: abekolli@ubt.edu.al

Shpërndarja e fitimit në disa situata punësimi në bujqësi

Vasillaq Kedhi ¹, Anjeza Bekolli ^{2*}

¹University of Tirana, Albania

²Agricultural University of Tirana, Albania

*Corresponding author; E-mail: abekolli@ubt.edu.al

Abstrakt

Punësimi i përkohshëm apo sezonal, është një praktikë që vazhdon të shfaqet në sektorin e bujqësisë. Një moment kyç i kësaj praktike është ai i vendimmarrjes për të pranuar ose jo kushtet e punësimit ku, natyrisht, një element kryesor është përcaktimi i masës së përfitimit prej secilës palë pjesëmarrëse. Kërkimi i një vendimmarrjeje të argumentuar është dhe objekti i këtij artikulli pa pretenduar për një zgjidhje shteruese të problemit. Për të arritur në ndarje sa më të arsyeshme dhe të pranueshme të përfitimeve nga puna, është e nevojshme të kryhen analiza sasiore mbi baza principesh e kriteresh të përshtatshme për rrethana të caktuara siç janë parimi i barazitarizmit, parimi i proporcionalitetit, kriteri i kontributeve marginale, i të keqes më të vogël, i pakundërshtisë grupore etj, ose i disa prej tyre njëherësh. Megjithatë çdo rast punësimi në bujqësi ka veçoritë e veta, për të përcaktuar një masë shpërblimi mbi baza kriteresh të tillë, për tërësinë e tyre, një përjasje premtuese është shfrytëzimi rezultateve të teorisë së lojërave kooperative. Në artikull janë shqyrtuar tre situata punësimi në bujqësi të ndryshme për nga relacionet me punëdhënësin si dhe për nga rendimentet individuale të punëtorëve. Të tre rastet kanë të përbashkët pranimin prej palëve (pronar dhe punëtorë) të kushtit që shpërblimi të bëhet mbi bazën e fitimit neto të arritur prej prodhimit në mbyllje të punëve përkatëse të sezonit. Të tre rastet janë modeluar matematikisht si lojëra kooperative dhe, për to, janë gjetur zgjidhje bashkësiore dhe zgjidhje pikësore. Në këtë kuptim, edhe çka paraqitet në këtë artikull, është e karakterit aplikativ.

Fjalë kyce: Lojë kooperative, koalicion, bërthamë, zgjidhje bashkësiore, zgjidhje pikësore

JEL Codes: C70, C71, C78

Hyrje

Në praktikë ndeshen shpesh raste ku pronari i një parcele apo strukture të prodhimit bujqësor kërkon punëtorë bujqësie për kryerjen e punëve përgjatë një

sezoni prodhimi. Situata të tilla ndodhin edhe nëpër fushat (ndonjëherë djerrë) të vendit, në ferma me sera, ullishte, ferma frutore brenda dhe jashtë shtetit etj.

Nga ana tjetër, nuk mungojnë persona të interesuar për t'u punësuar në punë të tilla. Por, ndërkohë që të gjithë janë të interesuar të punësohen, secili ka edhe synimet e veta për fitimin që do të fitojë dhe kështu krijohet një përballje interesash. Pra, kemi të bëjmë me situata ku zhvillimet lidhur me kryerjen e punëve nuk varen nga një individ apo palë e vetme por, nga disa të tilla dhe, ndërkohë, kërkohet një bashkëpunim ndërmjet tyre. Çështja më përcaktuese në këtë përballje është mënyra e shpërblimit të gjithsecilit në përfundim të punës.

Sigurisht, kudo ka një përvojë që ndiqet në shpërblimin e punëtorëve. Në shumë raste shpërblimi bëhet mbi bazën e orëve apo ditëve të punës me një vlerë të fiksuar për çdo njësi kohore. Por, ka edhe shumë raste ku shpërblimi, me marrëveshje paraprake, bëhet mbi bazën e vlerës së prodhimit të realizuar në mbyllje të punës. Gjithsesi, në tërësinë e rasteve, shpërblimet përcaktohen prej akordesh që pajtojnë qëndrimet subjektivistë të palëve. Vënia e këtyre marrëdhënieve mbi baza kriteresh që përkojnë me principe të drejtësisë të pranuar nga shoqëria nëpërmjet modelesh analitike e racionale, do të ishte me interes (shoqëror). Realizimi i synimeve të tilla mbi masën e shpërblimit, sigurisht kërkon edhe një analizë sasiore të përshtatshme të situatave konkrete me qëllim që secila palë të ketë argumente të mjaftueshme për vendimmarrjen e vet. Në këtë mënyrë mund të arrihet në marrëveshje të punësimit sa më të drejta e të mirëpranuar nga palët

Në këtë parashtrim hyrës të situatave që merren në shqyrtim vërejmë dy karakteristika të përgjithshme të tyre. E para, vendimmarrja nuk varet nga një palë e vetme siç ndodh në problemet e ndryshme të optimizimit, programimit matematik e të tjera por, nga të paktën dy palë dhe, e dyta, individët mund të bashkohen në grupime, të quajtura koalicionë, kur ky veprim u sjell atyre një përfitim të pranueshëm. Situatat që karakterizohen në këtë mënyrë, janë subjekti i teorisë matematike të lojërave, pikërisht atyre që quhen lojëra kooperative. Në këtë material janë trajtuar tri situata të ndryshme punësimi në bujqësi të ndryshme prej veçorive të tyre.

Është e qartë se nga pikëpamja ekonomike/financiare, sociale, ambientaliste, demografike dhe shumë aspekte të tjera që mund të merren parasysh, bujqësia dhe blegtoia janë sektorët më të rëndësishëm në vendin tonë. Për arsye të një bujqësie thellësisht tradicionale deri në mes të shekullit të kaluar, të një kooperativizimi të sforcuar me rendiment relativisht të ulët në periudhen e sistemit socialist dhe me një disorientim të ekonomive të vogla të formuara pas viteve 90, bujqësia, ky sektor jetik i ekonomisë tonë, përballët me probleme të shumta. Një pengesë të madhe për një zhvillim më intensiv të këtij sektori që kërkon përdorimin e teknikave dhe teknologjive moderne, paraqet madhësia e vogël e shumicës së fermave. Zmadhimi i tyre prej shitblerjes në tregun e tokave (që edhe ndodh në kohët tona), është një proces i ngadaltë dhe i pamjaftueshëm për ritmet e rritjes që i

duhen vendit. Një alternative tjetër që duket më rezultative e cila qmamië mund të ndiqet edhe në vendin tone është ajo e bashkërendimit dhe kooperimit në veprimtari të ndryshme si dhe e formimit të kooperativave me statute dhe kontrata të pranuar nga të gjithë individët. Studime me vlerë janë bërë vitet e fundit për ta njohur sa më mire problematikën e kooperimit në bujqësi nga shumë studiues si Dinar etj (1992), Imami etj (2021), Kola etj (2014), Sokoli (2020). Në këto studime janë bërë analiza të vlefshme dhe janë evidentuar rrethana dhe faktorë ndikues mbi mundësinë e veprimit kolektiv në bujqësi. Përveç aspekteve subjektive dhe rrethanore në veprimin kolektiv, janë studiuar edhe parakushte për veprim kolektiv siç janë bazat apo mbështetja financiare, aspektet ligjore e administrative si dhe politikat afatgjata për zhvillimin e fermave bujqësore. Ato studime janë kryer duke përdorur analiza sasiore me modele të ndryshme statistikore.

Por, pavarësisht rekomandimeve dhe masave mbështetëse apo nxitëse që mund të merren prej institucioneve të administratës shtetërore, prej bankave dhe agjencive të ndryshme financiare që operojnë në çdo vend, vendimmarrja për t'u angazhuar ose jo në një kolektivitet për të ndërmarrë një veprimtari me interes të përbashkët, bëhet nga çdo individ apo njësi e veçantë. Çdo palë bën gjykimet e veta për fitimet e saj të pritshme nga bashkëpunimi në ndonjë veprimtari produktive kolektive ose për koston që do t'i ngarkohet kur fjala është për pjesëmarrje në investime në ndonjë projekt ndërtimi që i shërben njëherësh një grupi individësh. Në situata të tilla rezultati i pritshëm për çdo individ nuk varet nga vullneti personal i tij por, ai varet nga kombinimi i vullneteve individuale. Studimi këtyre situatave dhe kërkimi i vendimmarrjeve të arsyeshme në raste të tilla është objekt i teorisë së lojërave. Konceptimet dhe mënyrat e zgjidhjeve që ka përpunuar kjo teori janë shumë të dobishme edhe në studimet e fizibilitetit të projekteve për të ngritur objekte shërbimi kolektiv apo organizime në kooperativa. Ky artikull, në vazhden e studimeve të përmendura më lart, përqëndron vëmendjen në një aspekt tjetër, pikërisht në vendimmarrjet individuale për veprime kolektive në bujqësi duke trajtuar fillimisht një problem të veçantë, atë të shpërblimit të punëtorëve të përkohshëm.

Ky artikull ka një karakter aplikativ i cili vendos në focus një model shumë i studiuar teorikisht është ai i lojërave kooperative, por situatat e shpërblimit për punët në bujqësi kanë veçoritë e tyre që duhen pasqyruar drejt në modele specifike për çdo rast. Modeli është relevant për raste të studimeve të ngjashme në bujqësi.

Vështrim mbi literaturën

Një modelim si lojë kooperative i problemit të shpërblimit për punëtorë bujqësie është bërë së pari nga nobelisti Loyd Shapley më 1971 (Shapley, 1971). Ai model i takon një situatë mjaft të thjeshtuar për nga kushtëzimet që merren parasysh por, gjithsesi është arritur më kryesorja, matematizimi i zgjidhjes së situatës përkatëse

përmes lojërave kooperative. Është hapur kështu rruga për modelimin matematik edhe të situatave me të tjera veçori për punët në bujqësi. Ky problem është sjellë për efekte metodike edhe në librin e autorit Dehez (Dehez, 2017). Për sa i takon teorisë së lojërave kooperative ku gjejnë zgjidhje tre problemet që do të trajtohen, literatura është shumë e gjerë si për aspektin e zhvillimit të vetë teorisë ashtu edhe në zbatimet e saj. Kooperimi është dukuri që shfaqet rëndom në shumë veprimtari ekonomike, shoqërore etj, dhe ky realitet e bën teorinë e lojërave gjithnjë e më tërheqëse për studiuesit, pasqyruar kjo në një literaturë shumë të pasur, lexuesit mund të shikojnë (Dequiedt etj, 2017; Kola etj, 2014; Tijs, 1981; Topkis, 1978). Në zgjidhjen e problemeve ambientaliste, të ndotjes si dhe të ujitjes, nëpërmjet kooperimit mund të shihen studimet (Patrone etj, 2006; Poorsepahy-Samian etj, 2012).

Metodologjia e kërkimit

Ky artikull ka një karakter aplikativ dhe, natyrisht, ai ndjek linjat metodologjike të studimeve të tilla. Veçohet një dukuri apo një situatë ku shtrohet për t'u zgjidhur një problem vendimmarrjeje. Përcaktohen kushtëzimet më karakterizuese të situatës në shqyrtim dhe formulohet kuptimi i një zgjidhjeje të asaj sate. Shprehen me mjete matematike kushtëzimet e situatës, dhe po ashtu me mjete matematike shprehen edhe objektivat që duhen arritur sipas kuptimit të përcaktuar të zgjidhjes. Në këtë mënyrë kryhet hapi bazal i studimit, ndërtimi i modelit matematik si një abstragim i situatës reale në një formë më të përgjithësuar. Nëse modeli nuk është i njohur, atëherë duhen zhvilluar koncepte dhe teori të nevojshme prej të cilave mund të arrihet në zgjidhjen e problemit. Në të kundërt, nëse një model me formulim disi të përgjithshëm ekziston, atëherë studiuesit, sipas veçorive të situatës konkrete, bëjnë përshtatjen e modelit dhe modifikimet e metodave të përgjithshme të procedurave të zgjidhjes. Në këtë studim modeli i përgjithshëm shumë i studiuar teorikisht është ai i lojërave kooperative, por situatat e shpërblimit për punët në bujqësi kanë veçoritë e tyre që duhen pasqyruar drejt në modele specifike për çdo rast.

Njohuri paraprake

Për trajtimin e problemit të shpërblimit është e nevojshme të sjellim paraprakisht disa koncepte dhe pohime nga teoria e lojërave.

Koncepti bazë mbi të cilin do të ndërtohet modeli matematik në problemet e mëposhtme është ai i lojërave kooperative.

Përkufizim 1. Quhet lojë kooperative një bashkësi individësh $N = \{1, 2, \dots, n\}$, ku $n = |N|$ e shoqëruar nga një funksion v që pasqyron bashkësinë $S(N)$ të nënbashkësive të N në bashkësinë e numrave realë, $v: S(N) \rightarrow \mathbb{R}$.

Elementet e bashkësisë N quhen lojtarë dhe v quhet funksion karakteristik i lojës. Çdo nënbashkësi $S \in S(N)$ quhet koalicion.

Problemi themelor i teorisë së lojërave kooperative është ai i ndarjes ndërmjet lojtarëve të vlerës $v(N)$ të koalicionit të madh N , ose e një pjese të saj.

Ky formulim i problemit të teorisë së lojërave kooperative ka një shtrirje shumë të madhe dhe, në raste të ndryshme, ai merr veçori të përcaktuara sipas karakteristikave të funksionit v . Një grupim i madh lojërash kooperative formohet prej të ashtuquajturave lojëra me dobi të tranferueshme (shkurt ang., lojëra TU) ku, e mira $v(N)$ që duhet ndarë është e shprehur me anë të një malli ekuivalent, për shembull para, që mund të ndahet në çfarëdo pjesësh, dhe që lehtësisht janë të kalueshme nga një lojtar në një tjetër.

Nëse shuma e vlerave $v(\{i\})$ të funksionit v për të gjitha koalicionet $\{i\}$, me nga një lojtar ($i=1, \dots, n$), është më e madhe se $v(N)$, atëherë koalicioni i madh N nuk ka arsye të formohet sepse nuk do mund të fitojnë të gjithë lojtarët atë çka ata e arrijnë individualisht. Kur shuma e vlerave $v(\{i\})$ është e barabartë me $v(N)$, atëherë ka vetëm një ndarje të vlerës $v(N)$ me të cilën të gjithë lojtarët e arrijnë fitimin që do mund të merrnin duke punuar individualisht. Në këtë rast çdo lojtar shpërblehet në masën $v(\{i\})$, $i=1, \dots, n$. Për këto arsye, lojërat kooperative ku ka kuptim të shtrohet problemi i mënyrës së ndarjes së fitimit ndërmjet lojtarëve, janë ato për të cilat është i vërtetë mosbarazimi:

$$\sum_{i \in N} v(\{i\}) < v(N).$$

Lojëra të tilla janë quajtur lojëra kooperative të qënësishme.

Është e kuptueshme se çdo individ synon të arrijë një përfitim sa më të madh por, synime të tilla çojnë në përplasje interesash dhe në mospajtueshmëri për bashkëpunim ndërmjet palëve. Për t'i dhënë zgjidhje (ndarje e vlerës $v(N)$) situatave të tilla është e nevojshme të konceptohen principe dhe kritere të përshtatshme, dhe në bazë të tyre të modelohet teoria dhe aparati matematik përkatës për kërkimin e zgjidhjeve. Në këtë drejtim, teoria e lojërave është duke u zgjeruar vazhdimisht si në fushat e përdorimit të saj ashtu dhe në ide të reja konceptuale të zgjidhjeve si dhe të arsenalit të metodave përlllogaritëse. Ndërkohë, fushat e zbatimeve të teorisë së lojërave kooperative në veçanti, zgjerohen vazhdimisht në shumë drejtime të jetës ekonomike, shoqërore, juridike të kërkimit në shkencë e tj.. Zgjidhjet më të njohura deri tani klasifikohen në dy tipet e mëposhtme.

(a) Zgjidhje bashkësiore. Quhet zgjidhje bashkësiore e një loje kooperative çdo rregull ndarjesh të vlerës $v(N)$ që i shoqëron çdo loje (N, v) një nënbashkësi vektorësh $x \in \mathbb{R}^n$, ndonjëherë boshe, që plotësojnë disa kushte të paracaktuara.

Koncepti më bazal në zgjidhjet bashkësiore të lojërave kooperative është ai i bërthamës. Në formën që përdoret tani në teorinë e lojërave, ky koncept është formuluar nga Shapley L. dhe Gillies B. në vitin 1959 si më poshtë.

Përkufizim 2. Quhet bërthamë e një loje kooperative (N, v) bashkësia e vektorëve $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ që kanë vetinë e eficiencës dhe vetinë e racionalitetit sipas koalicioneve të shprehura përkatësisht prej relacioneve:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} x_i &= v(N) && \text{vetia e eficiencës} \\ \sum_{i \in S} x_i &\geq v(S) \quad \forall S \subset N && \text{racionaliteti sipas koalicioneve} \end{aligned}$$

Bërthamën e një loje kooperative do ta shënojmë me $C(N, v)$.

Në qoftë se në një lojë (N, v) , një vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, ka vetinë e eficiencës ndërsa, vetinë e racionalitetit e kanë vetëm koalicionet me nga një lojtar, atëherë vektori $\mathbf{x}$ quhet imputacion i asaj loje. Bashkësinë e imputacioneve do të shënojmë me $I(N, v)$.

Problemi themelor lidhur me konceptin e bërthamës është njohja e faktit nëse një lojë kooperative ka bërthamë jo boshe dhe, në rastin pohues, gjetja e një mënyre shprehëse të elementeve të saj. Për trajtimin e këtij problemi në tre situatat e mëposhtme, do të mbështetemi në disa pohimet të njohura të teorisë së lojërave kooperative, por paraprakisht duhet të sjellim edhe dy koncepte të nevojshme.

- Një lojë kooperative (N, v) quhet lojë konvekse (ose supermodulare) në qoftë se për çdo çift koalicionesh $S, T \subseteq N$ është i vërtetë mosbarazimi:

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T).$$

- Kontribut marginal i një lojtari $i \in S$ lidhur me një koalicion $S \subseteq N$ në një lojë (N, v) quhet diferenca $v(S) - v(S \setminus \{i\})$.

Teoremë 1. (Topkis, 1978; Shapley, 1988). Një lojë kooperative (N, v) është konvekse atëherë dhe vetëm atëherë kur kontributet marginale të të gjithë lojtarëve janë monotone në kuptimin e mosbarazimit:

$$v(S) - v(S \setminus \{i\}) \geq v(T) - v(T \setminus \{i\}), \quad \forall i \in T, \quad T \subset S \subseteq N \quad (1)$$

Teoremë 2. (Shapley, 1971) Çdo lojë konvekse (N, v) ka bërthamë jo boshe.

Në përkufizimin e bërthamës së një loje kooperative (N, v) me n lojtarë, shohim se ajo përcaktohet nga një sistem inekuacionesh lineare dhe një ekuacion linear. Gjeometrikisht kjo do të thotë se bërthama është një prerje e një numri gjysëm-hapësirash të hapësirës $\mathbb{R}^n$ me një hiperplan në $\mathbb{R}^n$. Rrjedhimisht ajo është një nënbashkësi konvekse e asaj hapësire. Gjithashtu prej vetë natyrës së kufizimeve përcaktuese të saj, rrjedh se ajo nënbashkësi është edhe e kufizuar. Pra, kur bërthama e një loje (N, v) është jo boshe ajo është një politop (poliedër i kufizuar). Për ta njohur disi më mirë këtë politop, le të shohim se cilat janë vlerat minimale dhe maksimale $(x_i^{\min}; x_i^{\max})$, $i=1, 2, \dots, n$, që mund të marrin koordinatat e imputacioneve të një loje kooperative me n lojtarë. Nga vet kuptimi i imputacioneve është e qartë se

$$x_i^{\min} = v(\{i\}) \quad (2)$$

ndërsa, vlera më e madhe që merret prej një lojtari 'i' arrihet kur të gjithë lojtarët e tjerë marrin vlerën e tyre më të vogël. Pra, kemi të vërtetë barazimet:

$$x_i^{\max} = v(N) - \sum_{j \neq i} v(\{j\}), \quad i=1,2,\dots,n \quad (3)$$

Pikat $A^i (x_1^{\min}, \dots, x_i^{\max}, \dots, x_n^{\min})$, $i=1, \dots, n$ ku vetëm koordinata e i-të është në vlerën e vet $x_i^{\max}$ ndërsa të gjitha të tjerat në vlerën $x_j^{\min}$, $j \neq i$, do t'i quajmë pika

skajore të imputacioneve. Një përfytyrim gjeometrik i bërthamës merret prej pohimit (e pranojmë pa vërtetim) në vijim:

Pohim 1. Bashkësia $I(N, v)$ e imputacioneve të një loje kooperative të qënësishme (N, v) është mbështjellësja konvekse e pikave skajore të saj: $\{A^1, A^2, \dots, A^n\} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Zgjidhje pikësore. Quhen zgjidhje pikësore në lojërat kooperative ato rregulla ndarjeje (alokime) te vlerës $v(N)$ që çdo loje (v) i shoqërojnë një vektor të vetëm $x \in \mathbb{R}^n$ përshtat me disa kriteret të pranuar. Ndërmjet zgjidhjeve pikësore të ndryshme, dy nga konceptimet më të rëndësishme janë: vlera Shapley dhe bërthamëza.

• Vlera Shapley është një alokim i vlerës $v(N)$ të koalicionit të madh tek lojtarët pjesëmarrës që bazohet mbi kontributet marginale të secilit lojtar $i \in N$ në çdo koalicion S të formuar hap pas hapi sipas të gjitha renditjeve të mundshme të bashkësisë N . Për çdo lojtar $i \in N$, mesatarja e kontributeve marginale të tij në të gjithë koalicionet S të formuar si më sipër e që përmbajnë lojtarin i përcaktohet prej barazimit:

$$x_i = \sum_{S \subseteq N: i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S - \{i\})], \quad i=1, \dots, n \quad (4)$$

ku $s=|S|$. Vektori x me komponente të përcaktuara prej barazimit (4) quhet vlerë e Shapley. Kjo vlerë teorikisht është gjetur prej autorit si rezultat i një sistemi aksiomatik të përzgjedhur prej tij që duhej të plotësohej prej alokimeve x të shumës $v(N)$ ndërmjet lojtarëve pjesëmarrës (Shapley, 1988).

• Bërthamëza (Nucleolus, Ang.). Koncepti i bërthamëzës është futur së pari nga Schmeidler (Schmeidler, 1969). Ideja që formalizohet me përkufizimin e konceptit të bërthamëzës është ajo e përmirësimit sa më të mundshëm të situatës së koalicioneve që janë më keq prej alokimesh të ndryshme. Për këtë qëllim merren si kriter të ashtuquajturat tepri (excess).

Quhet tepri e një alokimi x në lidhje me një koalicion $S \subset N$, $S \neq \Phi$, diferenca $e(x, S) = v(S) - x(S)$. Koalicioni që kundërshton më fort një imputacion x është ai që ka teprinë më të madhe. Në qoftë se për dy imputacione $x, y \in I(N, v)$ është i vërtetë mosbarazimi: $\max\{v(S) - x(S) \mid S \in N\} > \max\{v(S) - y(S) \mid S \in N\}$, atëherë koalicioni y quhet më i pranueshëm se koalicioni x sepse ka të paktën një koalicion

S me tepri më të madhe se tepritë e çdo koalicioni lidhur me imputacionin y . Nëse ata maksimume janë të barabartë, atëherë krahasohen tepritë e dyta më të mëdha lidhur përkatësisht me x dhe y . Për të kaluar në një formalizim të plotë të konceptit të bërthamëzës, çdo imputacioni x i shoqërohet një vektor $\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \dots, \theta_{n-2}(x))$, me komponente tepritë lidhur me x të të gjitha koalicioneve $S \subset N$, $S \neq \Phi$ të renditura në rendin zbritës të madhësisë së tyre. Për elementet e bashkësisë $\{\theta(x) | x \in I(N, v)\}$ marrim parasysh të ashtuquajturën renditje leksikografike të tyre. Në qoftë se për vektorët $\theta(x)$, $\theta(y)$ ekziston një indeks k i tillë që $\theta_i(x) = \theta_i(y)$ për $i < k$ dhe $\theta_k(x) > \theta_k(y)$, atëherë thuhet se $\theta(x)$ është leksikografikisht më i madh se $\theta(y)$ dhe shënohet $\theta(x) >_L \theta(y)$. Në këtë renditje, imputacioni y është më i pranueshëm se imputacioni x .

Përkufizim 3. Një imputacion x është bërthamëzë e një loje (N, v) në qoftë se është i vërtetë mosbarazimi: $\theta(x) <_L \theta(z)$ për çdo $z \in I(N, v)$.

Sipas vet përkufizimit, bërthamëza është një alokim x me vektorin minimal $\theta(x)$ të renditjes leksikografike që do të thotë, alokim me minimum të maksimumeve të teprive në bashkësinë $I(N, v)$. Schmeidler ka treguar se bërthamëza e çdo loje përbëhet nga një alokim i vetëm. Një nga metodat më të njohura për gjetjen e bërthamëzës është edhe algoritmi i Kopelowitz (Kopelowitz, 1967; Kedhi, 2017). Ky algoritëm përcakton alokimin e bërthamëzës duke zgjidhur një ose, njëri pas tjetrit, disa programime lineare.

Këtu më poshtë shtjellohet modeli matematik i tre rasteve prej situatash të ndryshme të punësimit në bujqësi duke përdorur teorinë e lojërave kooperative.

Analiza e rezultateve dhe gjetjet kryesore

I. Në një fermë bujqësore, relativisht të vogël, pronari individualisht mund të kryejë vetëm 20% të punëve për prodhimin sezonal. Për të mundësuar shfrytëzimin sa më të plotë të kapacitetit të fermës ai kërkon të marrë dy punëtorë bujqësie. Prej zonës përkatëse janë paraqitur dy punëtorë të tillë që kanë nivele të ndryshme të rendimentit në punë. Nëse pronari do kryejë punët se bashku vetëm me punëtorin e parë, ata do mund të mernin si produkt 50% të kapacitetit të fermës ndërsa, po të punësojë vetëm punëtorin e dytë do të arrihej në marrjen e 80% të kapacitetit prodhues. Në qoftë se angazhohen në punë të dy punëtorët, atëherë kapaciteti i fermës shfrytëzohet 100%. Për arsye të veçorive të fermës, asnjëherë nuk kryhen punime pa pjesëmarrjen e pronarit.

Në situatën e parashtruar më sipër, çështja kryesore që paraqitet është ajo e përcaktimit të një ndarjeje të fitimit neto që merret në fund të një sezoni prodhimi nëse bien dakord të punojnë të tre palët. Kjo situatë vendimmarrjeje, së bashku me problemin e vet themelor, mund të formulohet matematikisht si një lojë kooperative (ose ndryshe, lojë e koalicioneve).

Duke numëruar me 1 pronarin dhe, me 2 e 3 përkatësisht punëtorët, ndërtojmë lojën kooperative (N,v) me bashkësi lojtarësh $N=\{1,2,3\}$ dhe funksion karakteristik v me vlera të përcaktuara nga barazimet:

$$\begin{aligned} v(\{1\}) &= 20, \quad v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0 \\ v(\{1,2\}) &= 50, \quad v(\{1,3\}) = 80, \quad v(\{2,3\}) = 0 \\ v(\{1,2,3\}) &= 100. \end{aligned}$$

Këto vlera të funksionit v janë marrë si shprehëse të përqindjes së vlerës $v(N)$ të fitimit neto që merret prej prodhimit sipas kontributit të gjithsecilit në punët e nevojshme.

Kjo lojë kooperative është modeli matematik i situatës së shpërblimeve të marrë në shqyrtim. Bërthama e kësaj loje, sipas vet përkufizimit, përcaktohet nga kufizimet:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 100 \\ x_1 \geq 20, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 50 \\ x_1 + x_3 \geq 80 \\ x_2 + x_3 \geq 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{vetia e eficiences} \\ \text{racionaliteti sipas koalicioneve} \end{array}$$

Kërkimin e zgjidhjes së tipit bërthamë për këtë lojë po e paraqesim paralelisht me një ilustrim gjeometrik të saj.

•Imputacionet e lojës.

Për lojërat me tre lojtarë, pikat skajore përkatëse janë të trajtës:

$$A^1(x_1^{\max}, x_2^{\min}, x_3^{\min}), \quad A^2(x_1^{\min}, x_2^{\max}, x_3^{\min}), \quad A^3(x_1^{\min}, x_2^{\min}, x_3^{\max}).$$

Sipas barazimeve (1) dhe (2), vlerat minimale dhe ato maksimale të alokimeve për secilin lojtar në lojën në shqyrtim, janë:

$$\begin{aligned} x_1^{\min} &= v(\{1\}) = 20 & x_2^{\min} &= 0 & x_3^{\min} &= 0 \\ x_1^{\max} &= v(N) - v(\{2\}) - v(\{3\}) = 100 - 0 - 0 = 100, & x_2^{\max} &= 80 & x_3^{\max} &= 80. \end{aligned}$$

Prej kësaj përcaktohen pikat skajore të imputacioneve të lojës: $A^1(100, 0, 0)$, $A^2(20, 80, 0)$, $A^3(20, 0, 80)$. Këto pika ndodhen në planin me ekuacion $x_1 + x_2 + x_3 = 100$ (vetia e eficiencës së imputacioneve). Ky plan dhe pikat skajore A^1, A^2, A^3 tregohen në fig.1 ku origjina e boshteve koordinativë është zhvendosur në pikën $Q(20,0,0)$ ku koordinatat janë përkatësisht të barabarta me vlerat e funksionit karakteristik v të kësaj loje për koalicionet me një lojtar. Në bazë të Pohimit 1, zona trekëndore $A^1A^2A^3$ e atij plani, si mbështjellëse e pikave skajore, është bashkësia $I(N,v)$ e imputacioneve të lojërave të tilla.

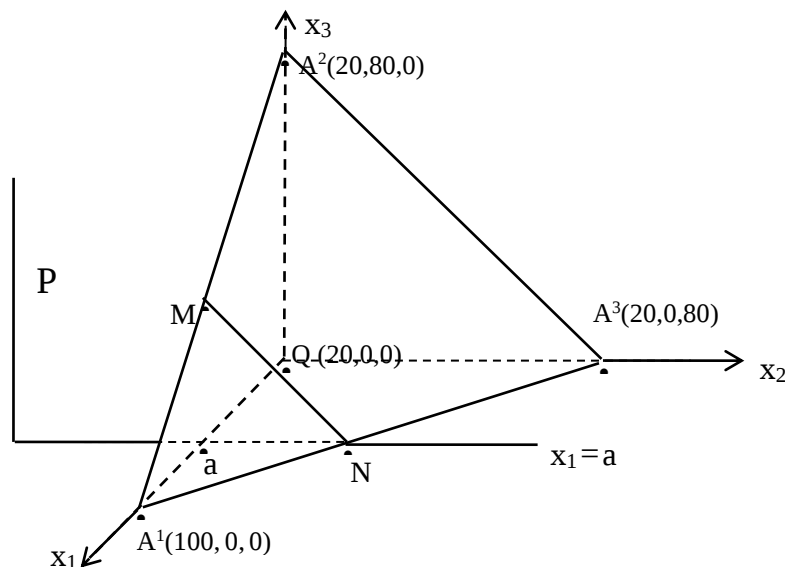
Bërthama e lojës.

Bërthama e lojës përbëhet nga të gjitha ato imputacione (pika të trekëndëshit $A^1A^2A^3$) që plotësojnë edhe kushtet e racionalitetit për koalicione me më shumë se një lojtar, në rastin tonë, me dy lojtarë. Plotësueshmërinë e këtyre kushteve po e kërkojmë duke përdorur paraqitjen gjeometrike të inekuacioneve përkatëse.

Një ekuacion i trajtës $x_1 = a$ përcakton në hapësirë një plan P i cili pret trekëndëshin e imputacioneve A^1, A^2, A^3 në segmentin MN paralel me brinjën A^2A^3 (fig.1). Për vlera $x_1 < a$ segmenti MN zhvendoset drejt brinjës A^2A^3 ku, koordinata x_1 e pikave të saj është e barabartë me vlerën minimale $v(\{1\})$.

Ky interpretim vlen edhe për prerje me plane të trajtave $x_2 = b$ dhe $x_3 = c$. Këto vërejtje na lejojnë të përcaktojmë gjeometrikisht bërthamën e lojës duke vepruar vetëm mbi trekëndëshin $A^1A^2A^3$ të paraqitur në plan (fig.2).

Figure 1. Bashkësia e imputacioneve



Burimi: Autorët

Prej vet ndërtimit të trekëndëshit, vërejmë se në çdo kulm të tij A^i , $i=1,2,3$, arrihet maksimumi i vlerës së ndryshores x_i dhe, në brinjën përballë, minimumi i saj.

Në bazë të vetisë së eficiencës dhe asaj të racionalitetit sipas koalicioneve, për imputacionet e bërthamës së një loje kooperative, është e vërtetë njëvlefshmëria:

$$x_i + x_j \geq v(\{i,j\}) \Leftrightarrow x_k \leq v(N) - v(\{i,j\}), \quad i \neq j \neq k, i,j,k \in \{1,2,3\}. \quad (5)$$

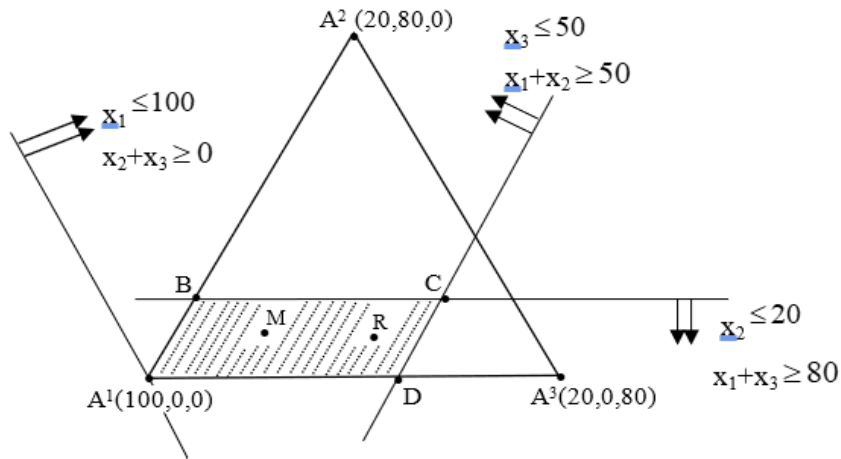
Për rastin në shqyrtim prej (5) përftohen këto njëvlefshmëri:

$$x_1 + x_2 \geq 50 \Leftrightarrow x_3 \leq 100 - 50 = 50$$

$$x_1 + x_3 \geq 80 \Leftrightarrow x_2 \leq 100 - 80 = 20$$

$$x_2 + x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \leq 100 - 0 = 100$$

Figure 2. Bërthama e lojës



Burimi: Autorët

Pra, për paraqitjen gjeometrike të një kufizimi të tipit $x_i + x_j \geq v(\{i,j\})$, mund të përdorim mosbarazimin e njëvlefshëm $x_k \leq v(N) - v(\{i,j\})$, $i \neq j \neq k$. Për lojën në shqyrtim, gjysëmplanet $x_3 \leq 50$, $x_2 \leq 20$ dhe $x_1 \leq 100$ janë treguar me një çift shigjetash në fig.2. Prerja e këtyre gjysëmplaneve me trekëndëshin e imputacioneve $A^1A^2A^3$ paraqet gjeometrikisht bërthamën e lojës. Ajo prerje është katërkëndëshi i vijëzuar A^1BCD . Për secilën prej pikave B,C,D janë të njohura dy prej koordinatave të tyre (si prerje dy drejtëzash ku ato ndodhen ndërsa koordinata tjetër përcaktohet duke përdorur ekuacionin $x_1 + x_2 + x_3 = 100$). Në këtë mënyrë gjejmë se kulmet e zonës (në këtë rast katërkëndësh) së bërthamës janë: $A^1(100,0,0)$, $B(80,20,0)$, $C(30,20,50)$, $D(50,0,50)$. Prej kësaj shohim se, në alokimet e bërthamës, shpërblimet e lojtarëve luhaten në kufijtë e mëposhtëm:

$$30 \leq x_1 \leq 100, \quad 0 \leq x_2 \leq 20, \quad 0 \leq x_3 \leq 50$$

me kusht që të plotësojnë edhe kufizimin e eficiencës ($x_1 + x_2 + x_3 = 100$).

Është arritur kështu në një zgjidhje bashkësiore të problemit të ndarjes së fitimit neto. Çdo alokim i vlerës $v(N)$ ndërmjet lojtarëve sipas koordinatave (x_1, x_2, x_3) të çdo pike brenda këtyre kufijve, nuk ka arsye të kundërshtohet as prej individësh dhe as prej koalicionesh me dy punëtorë. Pra, në këndvështrimin e vetëm racionalitetit (individual apo grupor) të gjitha pikat e katërkëndëshit A^1BCD janë zgjidhje e problemit të ndarjes së prodhimit. Duke qënë se sasia e tyre në këtë rast është e pafundme, natyrshëm shtrohet kërkesa për përzgjedhjen e atij alokimi që do të jetë vendimmarrja e ndarjes së vlerës $v(N)$. Për këtë qëllim mund të merren parasysh edhe veti të tjera të zgjidhjes së problemit, veçanërisht, zgjidhjet e ndryshme pikësore që kanë vetitë e tyre karakterizuese.

Për rastin në shqyrtim, më poshtë paraqiten dy zgjidhje të tilla.

- Vlera Shapley.

Duke përdorur barazimin (4) është përcaktuar vlera Shapley:

$$x = (61.6, 11.6, 26.6).$$

Ky alokim paraqitet prej pikës M në fig.2. Siç shihet, ajo pikë i përket bërthamës së lojës në shqyrtim. Pra, alokimi $x = (61.6, 11.6, 26.6)$, me komponente mesatare e kontributeve marginale të lojtarëve në koalicione sipas të gjitha renditjeve të mundshme të formimit të tyre, ka edhe vetinë e racionalitetit individual dhe grupor.

- Bërthamëza.

Nga zbatimi i algoritmit të Kopeloëitz është gjetur bërthamëza e lojës:

$$x = (50, 10, 40)$$

Edhe ky alokim, i paraqitur në fig.2 prej pikës R, i përket bërthamës së lojës. Pra alokimi sipas bërthamëzës $x = (50, 10, 40)$, përveç vetisë së minimizimit të maksimumeve të teprive të koalicioneve, ka gjithashtu vetinë e racionalitetit individual dhe grupor.

Në këtë mënyrë, lojtarëve u parshirohen për zgjedhje dy alternativa alokimesh. Duke u bërë të ditura paraprakisht edhe vetitë që kanë ato alokime lojtarët marrin vendimin që u duhet, pikën M ose R ose, ndonjë tjetër pike brenda katerkendeshit.

II. Problemi që parashirohet më poshtë është trajtuar për herë të parë me modelet teorisë së lojërave kooperative nga Shapley L. S. (1967) dhe Shubik M. (1984) Për detaje lexuesi mund të shikojë materialet në literaturë (Shapley, 1967; Shubik, 1984; Dequiedt etj 2011).

Pronari i një ferme bujqësore që vetë nuk punon, ka mundësinë të punësojë m punëtorë për të kryer punët e nevojshme deri në mbledhjen e prodhimit sezonal të asaj ferme. Është e kuptueshme se sasia y e prodhimit që mund të merret në mbyllje të sezonit, varet nga numri i punëtorëve që faktikisht do mund të punësohen. Po e shënojmë me k atë numër, $0 \leq k \leq m$. Për një paraqitje relativisht të thjeshtuar të situatës në shqyrtim, do të pranojmë se ajo karakterizohet nga dy veçoritë e mëposhtme.

1. Sasia e prodhimit varet vetëm nga numri i punëtorëve që aktivizohen në punë dhe jo nga ndonjë dallim cilësor ndërmjet tyre. Thënë ndryshe, në çdo grupim me një numër të caktuar punëtorësh, rendimenti individual i gjithsecilit prej tyre është i njëjtë.

2. Pronari i fermës nuk merr pjesë në kryerjen e punëve.

Sipas këtyre veçorive, prodhimi y që merret në fund të sezonit është njëfarë funksioni $y = f(k)$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Këtë funksion do ta quajmë funksioni i prodhimit. Le të pranojmë se funksioni f është i shprehur në një trajtë analitike gjë që bën të mundur shqyrtimin e tij edhe duke zëvendësuar ndryshoren k me një ndryshore të vazhduar z .

Për funksionin $y = f(z)$ do të pranojmë hipotezën e natyrshme se është një funksion monoton rritës.

Nëse numërojmë me 1 pronarin e fermës dhe me $2, 3, \dots, m+1$ punëtorët bujqësor, situata e mësipërme mund të pasqyrohet si një lojë kooperative (N, v) me bashkësi lojtarësh $N = \{1, 2, \dots, m+1\}$ dhe me vlera të funksionit karakteristik v të përcaktuara sipas barazimit:

$$v(S) = \begin{cases} f(s-1) & \text{në qoftë se } 1 \in S \\ 0 & \text{përndryshe} \end{cases}, \quad \forall S \subseteq N \quad (6)$$

ku s është kardinali i S ($s = |S|$).

Nga fakti që vetë pronari nuk punon dhe që, pa dakordësinë e tij (thënë ndryshe, pa koalicion me të) nuk ka prodhim, rrjedh se për çdo koalicion me vetëm një lojtar $S = \{i\}$, $i = 1, 2, \dots, m+1$, vlera e funksionit karakteristik është $v(\{i\}) = 0$. Kur pronari i punëson të gjithë punëtorët, formohet koalicioni i madh N me vlerë të funksionit karakteristik $v(N) = f(m)$.

Problemi i situatës në shqyrtim, pra i kësaj loje është gjetja e një alokimi të vlerës $f(m)$ ndërmjet lojtarëve punëtorë dhe pronar, prandaj ajo njihet me emërtimin loja e ndarjes së prodhimit. Në këtë mënyrë, situata e shpërblimit të punëtorëve për rastin në shqyrtim është shprehur sipas një modeli nga teoria e lojërave kooperative.

Sikurse për lojën përkatëse të situatës I, edhe për këtë të dytën, duket me shumë interes kërkimi i një zgjidhjeje bashkësiore siç është bërthama e lojës që ka vetinë e racionalitetit grupor. Për këtë qëllim do të shfrytëzohet veçoria e funksionit karakteristik të kësaj loje e shprehur në pohimin e mëposhtëm.

Pohim 2. Loja e ndarjes së prodhimit është konvekse atëherë dhe vetëm atëherë kur kontributi marginal i lojtarëve është jo zbritës.

Meqënëse për lojën e ndarjes së prodhimit kontributet marginale të lojtarëve janë të barabarta lidhur me çdo koalicion, kushti në Pohimin 2, duke përdorur barazimin (6), merr trajtën:

$$f(t) - f(t-1) \leq f(s) - f(s-1) \quad (7)$$

për çdo çift koalicionesh T, S të tillë që $T \subset S \subseteq N$.

Vërtetësia e Pohimit 2 rrjedh prej teoremës 1 (Topkis–Shapley) dhe shprehjes (7) të kontributeve marginale për lojën në shqyrtim.

Duke patur parasysh supozimin 1 që, në çdo koalicion rendimenti i secilit pjesëmarrës është i njëjtë, duket me vend që shpërblimi i punëtorëve të bëhet sipas principit barazitar. Duke ndjekur këtë princip, do të quajmë të vlefshme për lojën në shqyrtim vetëm imputacionet e bërthamës $C(N, v)$ të formës $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_2, \dots, x_2) \in \mathbb{R}^{m+1}$. Këtë nënbashkësi do ta shënojmë me $C = (N, v)$.

Në bazë të vetisë së efikasitetit, imputacionet e $C = (N, v)$ vërtetojnë barazimin:

$$x_1 + mx_2 = f(m) \quad (8)$$

Prej kësaj shihet se vlera maksimum $x_2^{\max}$ që, sipas kushtit të racionalitetit të koalicioneve mund të kërkojë një punëtor (për rastin tonë, edhe vlera maksimum që mund të kërkojnë të gjithë së bashku), përcaton njëherësh një kufi të poshtëm

$x_1^{\min}$ të pjesës që i kalon pronarit. Kjo e fundit mund të jetë e pranueshme ose e pa pranueshme për pronarin.

Përcaktimi i përpiktë i vlerës maksimum të shpërblimit të punëtorëve mund të arrihet vetëm kur njihet saktësisht funksioni i prodhimit $f(z)$. Por, në këndvështrimin teorik, është me interes njohja e karakteristikave të ndryshme të funksionit $f(z)$ që do mund të jepnin siguri se vlerat e përlogaritura $x_1^{\min}, x_2^{\max}$ të jenë kufij të pranueshëm për të dyja palët. Më poshtë po paraqesim një karakterizim të tillë.

Le të jetë x një imputacion i bërthamës së lojës në shqyrtim, $i \in N \setminus \{1\}$ një lojtar çfarëdo dhe, $T = N \setminus \{i\}$ koalicioni i vetëm i cili e përmban edhe pronarin 1. Vlera e funksionit karakteristik për këtë koalicion, barazimi (6), është $v(T) = f(m-1)$. Si element i bërthamës, imputacioni x vërteton mosbarazimin:

$$x(T) \geq v(T) = f(m-1)$$

(vetia e racionalitetit sipas koalicioneve). Nga ana tjetër, prej vetisë së eficiencës, për këtë koalicion është i vërtetë barazimi:

$$x(T) + x_2 = v(N) = f(m)$$

Prej dy relacioneve të fundit merret mosbarazimi:

$$x_2 \leq f(m) - f(m-1)$$

Ky mosbarazim tregon se shpërblimi x_2 i çdo punëtori në imputacionet e $C = (N, v)$ ka si vlerë maksimum $x_2^{\max}$ kontributin marginal $f(m) - f(m-1)$ të secilit punëtor në koalicionin e madh. Nëse lojtarëve punëtorë u alokohet shpërblimi x_2^* , atëherë vlera minimum që i mbetet pronarit është:

$$x_1^* = f(m) - m[f(m) - f(m-1)].$$

Që vektori $x^* = (x_1^{\min}, x_2^{\max}, \dots, x_2^{\max})$ të jetë një imputacion i bërthamës duhet që shpërblimi x_1^* i pronarit të jetë jonegativ (racionaliteti individual). Plotësimi i këtij kushti varet nga natyra e funksionit $f(z)$. Natyrisht, është me interes të veçojmë ndonjë klasë funksionesh që plotësojnë këtë kërkesë. Për këtë qëllim po shprehim pak më ndryshe vlerën minimum $x_1^{\min}$ që mund t'i alokohet pronarit:

$$\begin{aligned} x_1^{\min} &= f(m) - mf(m) + mf(m-1) = (1-m)f(m) - mf(m-1) = \\ &= m(m-1) \left(\frac{f(m-1)}{m-1} - \frac{f(m)}{m} \right) \end{aligned}$$

Prej kësaj paraqitjeje të vlerës minimum të shpërblimit të pronarit, shihet se alokime të pranueshme prej tij mund të merren vetëm në qoftë se është pozitive diferenca

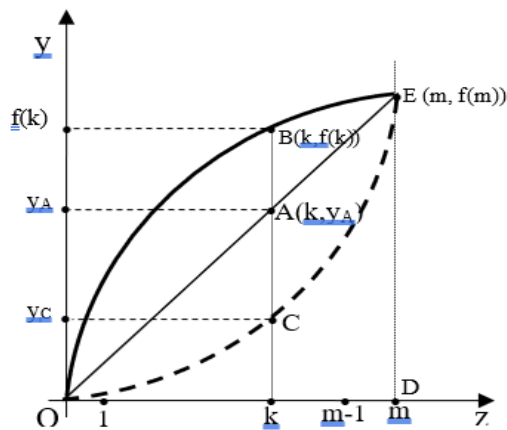
$$\frac{f(m-1)}{m-1} - \frac{f(m)}{m}$$

Një klasë funksionesh që e plotëson këtë kusht është ajo e funksioneve konkavë të përcaktuar në $[0, m]$. Në fig.3 paraqitet grafiku i një funksioni të tillë me vijën OBE. Le të jetë k një vlerë e plotë e ndryshores z . Pika $B(k, f(k))$ ndodhet në grafikun e atij funksioni ndërsa, pika $A(k, y_A)$ mbi kordën OE.

Prej proporcionaliteteve në trekëndëshin OED është i vërtetë barazimi:

$$\frac{y_A}{k} = \frac{f(m)}{m}$$

Figure 3. Grafiku i një funksioni konkav



Burimi: Autorët

Meqë grafiku është konkav (vija OBE), pika B mbi vijë është më sipër pikës A të kordës OE me të njëjtën abshisë k e rrjedhimisht, kemi të vërtetë mosbarazimin $y_A < f(k)$. Duke zëvendësuar y_A me $f(k)$ në barazimin e mësipërm merret mosbarazimi:

$$\frac{f(k)}{k} - \frac{f(m)}{m} > 0$$

Në veçanti, për $k = m - 1$ merret relacioni:

$$\frac{f(m-1)}{m-1} - \frac{f(m)}{m} > 0$$

Pra, kur funksioni i prodhimit f është konkav, atëherë bërthama e lojës së ndarjes së vlerës $v(N)$ të prodhimit është jo boshe dhe vlerat reciprokisht skajore të ndryshoreve x_1, x_2 përcaktohen prej barazimeve:

$$x_2^{\max} = f(m) - f(m-1) \quad \text{dhe} \quad x_1^{\min} = m(m-1) \left(\frac{f(m-1)}{m-1} - \frac{f(m)}{m} \right) \quad (9)$$

Bërthama e lojës është:

$$C^-(N,v) = \{(x_1, x_2, \dots, x_2) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_1 \geq x_1^{\min}, 0 \leq x_2 \leq x_2^{\max}\} . \quad (10)$$

Mbi ecurinë e këtyre vlerave skajore për funksionet konkavë kur numri i lojtarëve rritet, mund ta krijojmë duke shqyrtuar ndonjë shembull numerik. Le të pranojmë se funksioni i prodhimit është i trajtës $f(z) = a\sqrt{z}$ (konkav në $[0, \infty[$) dhe se sasia totale e prodhimit është $f(m) = 100$ njësi. Ky funksion ka vlerën zero për $z=0$ dhe, vlerën 100 për $z=m$. Prej kësaj, gjejmë se $a = 1/\sqrt{m}$ dhe, saktësisht ai ka trajtën:

$$f(z) = \frac{100}{\sqrt{m}} \sqrt{z} \quad (11)$$

Për këtë funksion prodhimi konkav dhe, për numër punëtorësh nga 2 deri në 10, sipas barazimeve (9), janë përlllogaritur vlerat skajore $x_1^{\min}$ dhe $x_2^{\max}$ që tregohen në tab.1.

Table 1. Vlerat minimale dhe maksimale për pronarin

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_1^{\min}$	41.42	44.95	46.41	47.21	47.72	48.07	48.33	48.52	48.69
$x_2^{\max}$	29.29	18.35	13.40	10.56	8.71	7.42	6.46	5.72	5.13

Burimi: Autorët

Në këtë tabelë shihet se për një prodhim grupor të caktuar $f(m)$, me rritjen e numrit m të punëtorëve, vlera skajore minimale për pronarin rritet duke shkuar drejt gjysmës së vlerës së prodhimit. Për rrjedhojë pjesa që mbetet zvogëlohet dhe kështu edhe vlera skajore (maksimale) e shpërblimit individual të punëtorëve zvogëlohet.

Ky informacion mund t'i shërbejë palës së punëtorëve për të vlerësuar numrin e pranueshëm të formimit të grupit të tyre.

Në qoftë se $f(z)$ është një funksion konveks (treguar me vijë të pikëzuar në fig.3), atëherë kemi:

$$\frac{f(m-1)}{m-1} - \frac{f(m)}{m} < 0$$

Ky fakt çon në një kufi të poshtëm të fitimit të papranueshëm për pronarin. Për pasojë, shprehja (10) e bërthamës është e pavlefshme dhe bërthama është boshe. Kjo do të thotë se në këtë rast nuk ekziston ndonjë vektor x që vetinë e eficiencës dhe njëherësh atë të racionalitetit sipas koalicionene. Kur ndodh kështu dhe, vendimmarrësit janë të interesuar të lidhin kontratë punësimi, atëherë, detyrimisht duhet të përzgjidhen kritere apo veti të tjera sipas të cilave do të merret zgjidhje e

pranueshme. Një orientim i tillë mbetet i vlefshëm edhe në rastet kur bërthama ka një pafundësi zgjidhjedh por është e nevojshme të përzgjidhet vetëm një prej tyre. Të kësaj natyre janë zgjidhjet: ε -bërthama, thelbi (kernel, ang.), bashkësitë e negocimit, vlera Shapley, τ -vlera etj (Dequiedt etj, 2011; Dehez etj, 2017). Për rastin e mësipërm që ka bërthamë jo-boshe, për veçimin e një zgjidhjeje vendimmarrëse kemi marrë kriterin e kontributeve marginale sipas vlerës Shapley (barazimi (4)).

Në përgjithësi, për vlera të mëdha të numrit n të lojtarëve, sasia e veprimeve llogaritëse për gjetjen e vlerës Shapley rritet me shpejtësi eksponenciale. Por, vetë trajta e veçantë që ka funksioni karakteristik i problemit të ndarjes së prodhimit (barazimi (6)), na mundëson transformimin e barazimit (4) në dy formula që pakësojnë shumë vëllimin e përlllogaritjeve të vlerës Shapley. Për këtë qëllim le të vërejmë sa më poshtë.

Shënojmë: S^k , $k=1,2,\dots,m+1$ bashkësitë e koalicionëve që përmbajnë lojtarin 1 dhe që kanë përkatësisht $1,2,\dots,n=m+1$ lojtarë.

- Sipas mënyrës së përcaktimit të funksionit karakteristik v (barazimi (4)), vlerat e tij për të gjitha koalicionet që nuk përmbajnë lojtarin 1 janë të barabarta me 0.
- Për koalicionet S që e përmbajnë lojtarin 1 vlerat e funksionit karakteristik varen vetëm nga numri i lojtarëve-punëtorë: $v(S)=f(s-1)$, $s=1,2,\dots,k,\dots,n=m+1$.
- Shënojmë me $S^1, S^2, \dots, S^k, \dots, S^n$ nënbashkësitë e koalicionëve që e përmbajnë lojtarin 1 dhe që kanë përkatësisht $1, \dots, k, \dots, n$ lojtarë. Numri i koalicionëve që kanë ato nënbashkësi përkatësisht është:

$$C_{n-1}^0, C_{n-1}^1, \dots, C_{n-1}^{k-1}, \dots, C_{n-1}^{n-1}$$

- Nëse nga një koalicion $S \in S^k$ që e përmban lojtarin 1 hiqet ky lojtar, atëherë $v(S-\{1\})=0$, $\forall S \in S^k$, $k=1,2,\dots,n=m+1$.

- Numri i koalicionëve që përmbajnë: lojtarin 1, një lojtar të caktuar $i \in N - \{1\}$ dhe, që kanë përkatësisht $2,3,\dots,k,\dots,n$ lojtarë, është:

$$C_{n-2}^0, C_{n-2}^1, \dots, C_{n-2}^{k-2}, \dots, C_{n-2}^{n-2}$$

Duke marrë parasysh këto fakte, prej barazimit (4) gjejmë këto shprehje të komponenteve të vlerës Shapley për lojën ndarjes së prodhimit:

$$x_1 = \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^m f(k), x_i = \frac{1}{m(m+1)} [mf(m) - \sum_{k=1}^{m-1} f(k)], i=2,3,\dots,n(=m+1) \quad (12)$$

Sipas këtyre barazimeve janë përlllogaritur komponentet x_1 dhe x_i , $i=2,\dots,m+1$ të vlerës Shapley për rastin e funksionit konkav $\frac{100}{\sqrt{m}} \sqrt{z}$ (tab.2) dhe të funksionit

konveks $\frac{100}{\sqrt{m^3}} \sqrt{z^3}$ (Tab.3).

Table 2. Komponentet e vlerës Shapley për funksionin $\frac{100}{\sqrt{m}} \sqrt{z}$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	50	57	59,85	61,46	62,48	63,17	63,70	64,06	64,35	64,59
x_i	50	21,55	13,38	9,63	7,50	6,14	5,19	4,49	3,96	3,54

Burimi: Autorët

Table 3. Komponentet e vlerës Shapley $\frac{100}{\sqrt{m^3}} \sqrt{z^3}$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_1	50	45,12	43,42	42,56	42,04	41,70	41,46	41,28	41,13	41,01
x_i	50	27,44	18,86	14,36	11,59	9,72	8,36	7,34	6,54	5,90

Burimi: Autorët

Në këto tabela vërejmë se kur puna kryhet nga një punëtor i vetëm, atëherë pronarit dhe të punësuarit u alokohet e njëjta vlerë. Por, kur duhen më shumë punëtorë për kryerjen e punëve, atëherë gradualisht vlera që i alokohet pronarit rritet në rastin e funksioneve konkave dhe, gradualisht zvogëlohet në rastin e funksioneve konvekse. Vlerat e larta të përfitimit që merr pronari krahasuar me atë të një punëtori, shpjegohen me faktin se ai është i pranishëm në çdo koalicion me vlerë pozitive të funksionit karakteristik të lojës përkatëse por, asnjë nga punëtorët nuk merr pjesë në të gjitha ato koalicione.

III. Një pronar ferme ka fiksuar një përqindje të fitimit neto për veten e vet dhe pjesën tjetër për punonjësit që do kryejnë të gjitha punët e nevojshme për prodhimin stinor. Një veçori e situatës së këtij rast është fakti se punëtorët paraqiten në grupe (ndonjëherë edhe me një individ). Për arsye afërsie të natyrave të ndryshme si për shembull ajo zonale e banimeve, formimi prej tyre i ndonjë mikroskuadre me profile pune të ndryshme, apo një solidaritet që u jep më shumë siguri në punët që ndërmarrin e etj., grupime të tilla parashtrojnë kushtin që punësimi të bëhet me grupet në tërësi dhe jo me pjesë grupesh. Ky solidaritet i brendshëm i grupeve nuk mohon kapacitetet dhe kualifikimet e individëve që i përbëjnë, ato pasqyrohen në rendimentin e çdo individi dhe çdo nëngrupimi. Mbas negocimeve me përfaqësues të grupeve pronari ka pranuar kushtin specifik të paraqitur prej tyre dhe është arritur marrëveshja e punës me m grupe të tilla që njëherësh plotëson tërësisht nevojën e pronarit për punonjës bujqësie.

Problemi që shtrohet në këtë situatë, me kushtin e vetëm specifik, është ai i përgjedhjes së principeve apo kritereve të ndarjes së fitimit që u mbetet të punësuarve dhe, njëherësh me përzgjedhjen, edhe ai i gjetjes së teknikave përlllogaritëse në pajtim me ato kritere. Gjithsesi, pavarësisht nga parapëlqimi i

principeve, situata të punësimit me grupe të pandashme punonjësish mund të pasqyrohen në modele të përshtatshme të lojërave kooperative. Si bazë mbështetëse e modeleve të përshtatura për këto situata merret loja kooperative (N, v) ku, N është bashkësia e pjesëtarëve të të gjitha grupeve ndërsa funksioni karakteristik v tregon rendimentet e të gjitha koalicioneve të mundshme $S \subseteq N$, pavarësisht nga përkatësia e punëtorëve në grupet formuese të bashkësisë N .

Le të shënojmë me $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ bashkësinë e grupeve të punonjësve të cilët, në situatën në shqyrtim, përcaktojnë koalicione të pandashme pra, me pjesëmarrje tërësore të tyre në kontratën e punësimit të lidhur me pronarin. Bashkësinë e të gjitha lojërave të fundme (N, v) në të cilat një ndarje e fiksuar $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ e bashkësisë N në një numër m pjesësh ($N = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_m$ dhe $C_i \cap C_j = \Phi$) është e vetmja mënyrë e formimit të koalicioneve, do ta shënojmë me (N, v, C) . Lojëra të tilla janë quajtur lojëra me strukturë koalicionesh. Sikurse për lojërat kooperative në përgjithësi, edhe për ato me strukturë koalicionesh, zgjidhja mund të kërkohet mbi bazën e principeve e kriterëve të ndarjes së vlerës $v(N)$ të lojës të zgjedhura në përshtatje me specifikat e rasteve konkrete. Për lojërat bashkësisë (N, v, C) zgjidhja më e hershme është ajo e propozuar nga Owen (Owen, 1977). Një zgjidhje më e vonë propozohet nga Kamijo (Kamijo, 2009).

Zgjidhja e Owen, megjithëse e përshtat mirë vlerën Shapley për lojërat me strukturë koalicionesh, ajo përcaktohet vetëm prej kriterit të kontributeve marginale të lojtarëve. Nga një kënvështrim më analitik të faktorëve ndikues në rezultatin e punimeve duket e nevojshme që zgjidhja të pasqyrojë në njëfarë mënyre edhe një ndikim pozitiv që vjen nga njohja, mirëkuptimi dhe nga përvoja e përbashkët e kolegëve brenda grupit, fakte këto që u japin grupeve njëfarë qëndrueshmërie në kohë. E shprehur paksa ndryshe, synimi është që zgjidhja të mund të realizojë njëherësh principin marginalist dhe principin e solidaritetit brenda grupeve duke e shprehur edhe këtë të dytën në një mënyrë sasiore. Ky kënvështrim i situatës gjen një zgjidhje të kënaqshme me skemën procedurale të përpunuar nga Kamijo (Kamijo, 2009) që paraqitet më poshtë nëpërmjet një shembulli numerik.

Le të shënojmë C_1, C_2, C_3 tre grupe punonjësish të cilët bashkarisht formojnë një koalicion të madh që, nëpërmjet përfaqësuesve të tyre, ka lidhur kontratë punësimi me pronarin e fermës. Përbërja e grupeve është $C_1 = \{1, 2, 3\}$, $C_2 = \{4, 5, 6\}$, $C_3 = \{7, 8, 9, 10\}$ dhe koalicioni i madh $N = \{1, 2, \dots, 10\}$. Kemi të bëjmë kështu me një lojë kooperative me strukturë koalicionesh (N, v, C) ku $N = \{1, 2, \dots, 10\}$ dhe $C = \{C_1, C_2, C_3\}$. Prej kushteve të situatës në shqyrtim rrjedh se prej koalicioneve të ndryshme me elementet e bashkësisë N mund të shihen si koalicione aktive në formim të koalicionit të madh vetëm ato me pjesëmarrje tërësore të grupeve dhe ato me përbërje vetëm nga pjesëtarë brenda çdo grupi të caktuar. Të gjitha ato

koalicione me përbërje joaktive në lojë nuk ka arsye të merren parasysh. Procedimi teknik i përlogaritjeve të nevojshme për gjetjen e zgjidhjeve të lojërave me strukturë koalicionesh përbëhet nga dy faza:

I. Ndërtohet e ashtuquajtura lojë ndërmjet koalicioneve (M, v_C) me bashkësi të lojtarëve $M = \{1, 2, 3\}$ që simbolizon strukturën C të koalicioneve dhe me vlera të funksionit karakteristik të përcaktuara sipas brazimit:

$$v_C(H) = v\left(\bigcup_{k \in H} C_k\right), \quad \forall H \in M$$

II. Për çdo koalicion të strukturës $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ ndërtohet një lojë e reduktuar (ose nënlojë) që e shënojmë me $(C_k, v|_{C_k})$, $k = 1, 2, 3$. Funksioni karakteristik $v|_{C_k}$ i një loje të tillë ka vlera të barabarta me ato të funksionit v por, ai është i përcaktuar vetëm në bashkësinë përkatëse të lojtarëve C_k .

Mbas zgjidhjes së këtyre lojërave me vlerën Shapley përlogariten komponentet e vektorit x të ndarjes së fitimeve sipas barazimit :

$$x_i^k(N, v, C) = \frac{x_k(M, C) - v(C_k)}{|C_k|} + x_i(C_k, v|_{C_k}), \quad k = 1, 2, 3, \quad i \in C_k, \quad (13)$$

Loja (N, v) , baza e modelit që po aplikojmë (loja që nuk e merr parasysh strukturën C të koalicioneve), do të paraqitet plotësisht duke treguar vlerat e funksionit karakteristik v për $2^{10}-1$ koalicionet e mundshme. Por, për lojën kooperative me strukturë koalicionesh që po trajtojmë, zgjidhja sipas dy fazave të mësipërme përdor vetëm vlerat e funksionit karakteristik v të koalicioneve aktive. Për të shmangur teprinë në shkrimin e të dhënave, më poshtë janë shënuar vetëm vlerat e funksionit karakteristik për koalicionet aktive.

Në barazimin (13) shihet se shpërblimi i çdo punonjësi përbëhet nga dy pjesë. E para është e njëjtë për punonjësit brenda një koalicioni dhe tregon ndarjen në pjesë të barabarta të fitimit që arrihet prej tij përtej vlerës që ai koalicion do të merrte pa bashkëpunuar me të tjerët. Siç shihet, ndarja e asaj pjese të fitimit, është një zbatim i principit të barazizmit si shprehje e një solidariteti brenda grupit. Pjesa e dytë ka si bazë principin e marginalizmit në mënyrën e shprehur nga vlera Shapley (barazimi (4)).

Loja ndërmjet koalicioneve

$$(M, v_C), \quad M = \{1, 2, 3\},$$

$$v_C(1) = 22, \quad v_C(2) = 28, \quad v_C(3) = 34,$$

$$v_C(1, 2) = 52, \quad v_C(1, 3) = 58, \quad v_C(2, 3) = 62,$$

$$v_{C_3}(\{1, 2, 3\}) = 100.$$

$$\text{Zgjidhja: } x_1(M, C) = 27, \quad x_2(M, C) = 34, \quad x_3(M, C) = 39.$$

Lojërat e reduktuara:

1. Loja e reduktuar $(C_1, v|_{C_1})$: $C_1 = \{1, 2, 3\}$,

$$v|_{C_1}(1) = 4, \quad v|_{C_1}(2) = 6, \quad v|_{C_1}(3) = 6$$

$$v|_{C_1}(1, 2) = 12, \quad v|_{C_1}(1, 3) = 13, \quad v|_{C_1}(2, 3) = 15$$

$$v|_{C_1}(C_1) = 22.$$

$$\text{Zgjidhja: } x_1^1 = 6, \quad x_2^1 = 8, \quad x_3^1 = 8$$

2. Loja e reduktuar $(C_2, v|_{C_2})$: $C_2 = \{4, 5, 6\}$,

$$v|_{C_2}(4) = 6, \quad v|_{C_2}(5) = 8, \quad v|_{C_2}(6) = 6$$

$$v|_{C_2}(4, 5) = 16, \quad v|_{C_2}(4, 6) = 14, \quad v|_{C_2}(5, 6) = 16$$

$$v|_{C_2}(C_2) = 28$$

$$\text{Zgjidhja: } x_4^2 = 8.66, \quad x_5^2 = 10.66, \quad x_6^2 = 8.66$$

3. Loja e reduktuar $(C_3, v|_{C_3})$ $C_3 = \{7, 8, 9, 10\}$,

$$v|_{C_3}(7) = 4, \quad v|_{C_3}(8) = 8, \quad v|_{C_3}(9) = 7, \quad v|_{C_3}(10) = 7$$

$$v|_{C_3}(7, 8) = 15, \quad v|_{C_3}(7, 9) = 14, \quad v|_{C_3}(7, 10) = 14, \quad v|_{C_3}(8, 9) = 18, \quad v|_{C_3}(8, 10) = 18,$$

$$v|_{C_3}(9, 10) = 17$$

$$v|_{C_3}(7, 8, 9) = 26, \quad v|_{C_3}(7, 8, 10) = 26, \quad v|_{C_3}(7, 9, 10) = 25,$$

$$v|_{C_3}(8, 9, 10) = 30$$

$$v|_{C_3}(C_3) = 34.$$

$$\text{Zgjidhja: } x_7^3 = 6, \quad x_8^3 = 10, \quad x_9^3 = 9, \quad x_{10}^3 = 9,$$

Sipas termit të parë në barazimin (13) gjejmë masën e përfitimit të lojtarëve për hir të principit të solidaritetit:

$$\frac{x_1(M, C) - v(C_1)}{|C_1|} = 1.66, \quad i = 1, 2, 3; \quad \frac{x_2(M, C) - v(C_2)}{|C_2|} = 2; \quad i = 4, 5, 6;$$

$$\frac{x_3(M, C) - v(C_3)}{|C_3|} = 1.25, \quad i = 7, 8, 9, 10.$$

Sipas barazimit (13) dhe zgjidhjeve të lojërave të reduktuara, gjejmë përfundimisht vektorin e mëposhtëm $x(N, v, C)$ për shpërblimet e lojtarëve:

$$x(N, v, C) = (7.66, 9.66, 9.66, 10.66, 12.66, 10.66, 7.25, 11.25, 10.25, 10.25).$$

Konkluzione

Një dukuri me karakter social në bujqësi që shfaqet jo vetëm në vendin tonë, është ai i punësimit të përkohshëm pra, i kontributit vetëm në punë dhe jo në kooperimin e mjeteve materialo-financiare investuese. Situatat e punësimit ndryshojnë si prej natyrës së punës ashtu dhe nga rrethanat e çdo rasti konkret. Problemi kryesor në këto situata, ai i shpërblimit të punës së gjithësecilit, duhet të marrë zgjidhje përshtat situatave që paraqiten. Shembujt e trajtuar në këtë artikull tregojnë se modelet e teorisë së lojërave kooperative janë mjetet e përshtatshme dhe më të artikulueshmet në bagazhin matematik që u japin zgjidhje atyre problemeve.

Teoria e lojërave kooperative synon t'i vendosë marrëdhëniet pronar-punëtor në raporte sa më të arsyeshme. Zgjidhjet e problemit të shpërblimit në punonjësve në disa situata në bujqësi sipas modeleve të teorisë së lojërave janë të bazuara në principe dhe kriterë shoqërisht të pranueshme. Njohja e atyre zgjidhjeve i bën më të përgatitur dhe më të vetëdijshëm punonjësit për të negociuar lidhur me kontratën e punësimit dhe për pritshmëritë e tyre prej rezultateve të punës.

Rezultatet e përfutuara prej zgjidhjes së modeleve të problemit të shpërblimit sipas lojërave kooperative janë një argument logjik që mund të përdoret prej palëve në fazën e negociimit pronar-punonjës dhe t'i çojë ata në lidhjen e kontratës së punës. Në situatat kur punësimi kushtëzohet nga detyrimi për të pranuar nga palët punësim në grupe të pandashme të punësuarish është më logjike të kërkojnë zgjidhje që pasqyrojnë principin e shumëpranuar të marginalizimit dhe njëherësh edhe një efekt të solidaritetit grupor në arritjen e fitimeve përfundimtare si grup.

Duke qënë se situatat e punësimit paraqiten me veçoritë e veta, një rëndësi të dorës parë ka aftësimi për t'i modeluar ato matematikisht, për të shfrytëzuar teoritë dhe metodat e njohura dhe për të kërkuar metoda të reja zgjidhjeje. Veçanërisht në njohjen e veçorive të situatave të ndryshme është shumë i rëndësishëm bashkëpunimi ndërmjet specialistëve të fushave të ndryshme.

Në dallim nga studime me karakter njohës të cilët janë shumë të rëndësishëm dhe të domosdoshëm sepse paraprijnë veprimtari ekonomiko-shoqërore të ndryshme, zbatimet e teorisë së lojërave kanë të bëjnë drejtpërsëdrejti me momentin final, atë të vendimmarrjes për realizimin e atyre veprimtarive dhe, për nga produkti i vet, ato janë të pazëvendësueshme me mjete apo analiza të tjera sasore.

References

- Dehez, P. (2017). *Théorie des jeux: Conflict, Negotiation, Cooperation et Pouvoir*. Economica, ISBN 978-2717869811
- Dequiedt, V., Durieu, J., Solal, Ph. (2011). *Théorie des Jeux et Applications*. Economica, ISBN 978-2717860351
- Dinar, A., Ratner, A. & Yaron, D. (1992) Evaluating Cooperative game theory in water resources. *Theory and decision*, 32(1), 1-20. <https://doi.org/10.1007/BF00133625>
- Imami, D., Valentinov, V., & Skreli, E. (2021). Food Safety and Value Chain Coordination in the Context of a Transition Economy: The Role of Agricultural

- Cooperatives. *International Journal of the Commons*, 15(1), 21–34. DOI: <http://doi.org/10.5334/ijc.1039>
from <https://www.thecommonsjournal.org/article/10.5334/ijc.1039/>
- Kamijo, Y. (2009). A two-step Shapley value in cooperative games with coalition structure. *International Game Theory Review (IGTR)*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., vol. 11(02), pages 207-214 DOI: 10.1142/S0219198909002261
- Kedhi, V. (2017). *Kërkimi Operacional, një Hyrje*. DITA PRINT, ISBN 978-9928-229-11-3
- Kola, R., Skreli, E., Osmani, M., Tanku A. (2014). Farmers Charakterics as determinant of kolektive action : the case of Greenhouse Producers in Albania. *New Medit*, 20-27
- Kopelowitz., A. (1967). Computation of kernels of simple games and nucleolus of n–person games. RM 31, The Hebrew University of Jerusalem.
- Owen, G., 1977. Values of games with a priori unions. In: Henn, R., Moeschlin, O. (Eds.), *Essays in Mathematical Economics and Game Theory*. Springer-Verlag, Berlin, pp. 76–88
- Patrone, F., Zara, S., Parrachino., I. (2006). *Cooperative Game Theory and its Application to Natural, Environmental, and Water Resource Issues: 1. Basic Theory*. Policy Research Working Paper; No. 4072. World Bank, Washington, DC. © World Bank. <https://openknowledge.worldbank.org/handle/10986/8852>
License: CC BY 3.0 IGO.”
- Poorsepahy-Samian, H., Kerachian, R., & Nikoo, M. R. (2012). Water and Pollution Discharge Permit Allocation to Agricultural Zones: Application of Game Theory and Min-Max Regret Analysis. *Water Resources Management*, 26(14), 4241-4257. <https://doi.org/10.1007/s11269-012-0142-x>
- Shapley., L.L.S. (1988). A value for n-person games. *The Shapley Value, Essays in honor of Lloyd S. Shapley*; dited by Alvin E. Roth. © Cambridge University Press,
- Shapley, L.S. (1971). Cores of convex games. *Int J Game Theory* 1, 11–26
<https://doi.org/10.1007/BF01753431>
- Schmeidler, D. (1969). The nucleolus of a characteristic function game, No 44, LIDAM Reprints CORE, Université catholique de Louvain, Center for Operations Research and Econometrics (CORE)
- Sokoli,O. (2020). The potential of rural cooperartives development in Albania: challenges and benefits. Dissertation to obtain the doctoral degree of agrocultural sciences. University of Hohenhelm.
- Tijs, S. (1981). Bounds for the core of a game and the t-value. In O. Moeschlin, & D. Pallaschke (Eds.), *Game Theory and Mathematical Economics* (pp. 123-132). North-Holland Publishing Company.
- Topkis, D. M. (1978). Minimizing a Submodular Function on a Lattice. *Operations Research*, 26(2), 305–321. <http://www.jstor.org/stable/169636>